Казанский Государственный Университет
Механико-математический факультет
Учебно-методическое пособие

Публикуется по решению методической комиссии механико
-математического факультета от 04.03.2010

Материалы для подготовки к экзамену по математическому анализу
Механико-математический факультет
Задачи на доказательство. I семестр.

Составитель Б.А. Кац

Аннотация

Наибольшую трудность для студентов младших курсов по традиции представляет решение задач на доказательство, входящих в билеты коллоквиума и экзамена по математическому анализа. Здесь представлен набор таких задач. Решения многих из них можно найти в указанной в конце данного пособия литературе. Однако настоятельно рекомендуется попробовать решить их самостоятельно, и лишь в случае неудачи воспользоваться этой литературой.

1. Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$, а ее производная ограничена, то $f(x) = O(x)$ при $x \to \infty$. Доказать.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty$, то эта функция принимает свое наименьшее значение в некоторой точке интервала (a, b). Доказать.

3. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(-1, 1)$ и $f(0) = f'(0) = 0$, то $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Доказать.

4. Привести пример функции, имеющей в некоторой точке производные первого и второго порядков, но не имеющей там третьей производной.

5. Функция $f(x)$ равна 0 при $x \le 0$ и $f(x) = x^p$ при $x > 0$. При каких значениях p она имеет производную в точке 0 ?

6. Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) и $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x) = -\infty$, то ее производная обращается в нуль в некоторой точке интервала (a, b). Доказать.

7. Производные какого порядка имеет в точке 0 функция $f(x) = |x^5|$?

8. Если функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на $\mathbb{R}$, а ее вторая производная ограничена, то $f(x) = O(x^2)$ при $x \to \infty$. Доказать.

9. Функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq 0$, дифференцируема при $x > 0$ и $f(0) = 0$. Тогда для любого $x > 0$ найдется $y \in (0, x)$ такое что $2yf(x) = x^2 f'(y)$. Доказать.

10. При каких значениях p функция $f(x) = |x|^p$ дифференцируема в точке 0 ?

11. Известно, что функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x и

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) + f(x-5h) - f(x) - f(x-h)}{h^2} = 3.$$

Найти $f'(x)$ и $f''(x)$.

12. Доказать, что любая периодическая функция непрерывная на $\mathbb{R}$ является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

13. Доказать, что монотонная последовательность, обладающая сходящейся подпоследовательностью, сходится.

14. Привести пример функции, которая не монотонна, но имеет обратную функцию.

15. Если дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ имеет период T, то внутри любого интервала длины $L \geq T$ найдется точка c такая что $f'(c) = 0$. Доказать.

16. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на конечном интервале (a, b), то существуют конечные пределы $\lim_{x \to a+0} f(x)$ и $\lim_{x \to a+0} f(x)$. Доказать.

17. Если функция дифференцируема на интервале (a, b) и ее производная ограничена, то она равномерно непрерывна на этом интервале. Доказать.

18. При каких значениях c уравнение $xe^x = c$ имеет два решения ?

19. Известно, что производная некоторой функции является периодической. Следует ли из этого, что сама функция имеет период ?

20. Доказать, что если функция f непрерывна на $[a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, то f равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

21. Используя критерий Коши доказать, что последовательность $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ не имеет конечного предела.

22. При каком значениях параметра a уравнение $(x+1)e^{-x} = a$ не имеет решений?

23. Пусть функция $f(x)$ равна 0 при $x = 0$ и $f(x) = (\log|x|)^{-1}$ при $0 < |x| < 0.5$. Дифференцируема ли эта функция в точке 0 ?

24. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, дифференцируема при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $f(0) = 0$. Тогда для любго $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ найдется такое $y \in (0, x)$ что $f(x)\cos y = f'(y)\sin x$. Доказать.

25. Если подмножество $\mathbb{R}$ одновременно открыто и замкнуто, то это либо пустое множество, либо само $\mathbb{R}$. Доказать.

26. Ограниченое замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}$ состоит из изолированных точек. Может ли число этих точек быть бесконечным?

27. При каких значениях положительного параметра a уравнение $\sin x = ax$ имеет одно решение?

28. На каждом интервале $(\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, уравнение $\operatorname{tg} x = kx$ имеет единственное решение при при любом $k \geq 0$. Доказать.

29. Пусть $\overline{\mathbb{R}}$ означает множество $\mathbb{R}$, пополненное двумя точками $+\infty$ и $-\infty$. Верно ли, что в $\overline{\mathbb{R}}$ любое замкнутое множество компактно?

30. Если монотонная функция имеет разрыв в некоторой точке, то это разрыв первого рода. Доказать.

Список литературы

[1] Зорич В. А., Математический анализ, ч. I. – М.: Наука, 1981.– 543 с.

[2] Никольский С. М., Математический анализ, т. 1. – М.: Наука, 1973. – 432 с.

[3] Шерстнев А. Н., Конспект лекций по математическому анализу. – Казань: Казанский государственный университет, 2005. – 373 с.

[4] Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1. – М.: Наука, 1969. – 800 с.

[5] И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий, Задачи и упражнения по математическому анализу, т.1. – М: Высшая школа, 2002. – 725 с.